# ÉNONCÉ

1. lem si $Df = 0$ sur $U$ ouv connexe de $\mathbb{R}^n$, alors $f$ const sur $U$

2. • $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $C^1$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $D_x f \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $f$ est une isométrie affine.

# LEÇONS.

204

214

215

# RÉFS.

[G] Gourdon - Analyse : EXO 4 p. 329.

# RÉSULTATS ASSOCIÉS.

1. inégalité des accroissements finis (IAF)
2. th. d'inversion locale (TIL)

# DÉMO

■ : à l'oral.
■ écrit au tableau.
■ : pour comprendre.

**BUT** : mq $f = u + \alpha$, $u \in O(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- Quel candidat pr $u$ ? → $Df$. Mais en quel pt ?

on s'appuie sur le lemme suivant.

**LEM** : . Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert connexe $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ différentiable. Si $Df = 0$, $f = \text{const}$

**Ainsi** : Si $Df$ est constante, $D(f - D_0 f) \equiv 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $f = \underbrace{D_0 f}_{\in O(\mathbb{R}^n)} + \underbrace{\alpha}_{\in \mathbb{R}^n}$

**Donc** : il suffit mq $Df$ constante.

**PLAN**

1. mq $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $\exists U_a$ ouvert contenant $a$ tq $\forall x, y \in U_a$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
2. mq $D_x f = D_y f$. $\forall x, y \in U_a$. (const sur $U_a$).
3. mq $Df$ const.
4. preuve du lemme.

1. mq $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $\exists U_a$ ouvert contenant $a$ tq $\forall x, y \in U_a$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

On va 2ble $\leq$

$\leq$ : iAF :

norme subordonnée.

Par hypothèse, $\|D_x f(h)\| = \|h\|$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$, donc $|||D_x f||| = 1$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Par l'iAF, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.

↳ $\mathbb{R}^n$ est convexe

$\geq$ : On veut $\geq$ autre sens..

Donc remplacer $f(x)$ par $x$ et $x$ par $f(x)$ : on veut un inverse !

→ TIL.

Soit $a \in \mathbb{R}^n$. $D_a f \in O(\mathbb{R}^n) \subset GL(\mathbb{R}^n)$.

Donc par le TIL, $\exists U_a$, voisinage ouvert de $a$ tel que $f|_{U_a}$ soit un $C^1$ difféomorphisme de $U_a$ sur $W_a = f(U_a)$.

On utilisera la not $f$ pr $f|_{U_a}$ qd bon ens

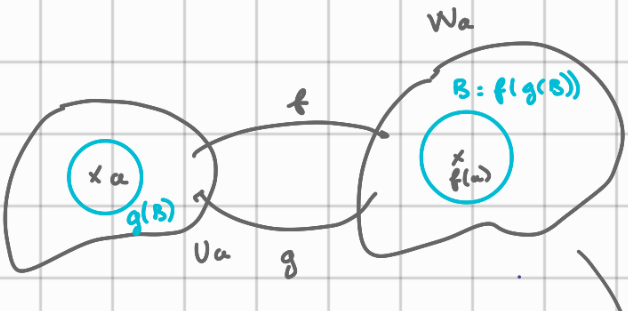
Notons $g : W_a \to U_a$ son inverse.

$\forall y = f(x) \in W_a$, $D_y g = D_{f(x)} f^{-1} = (D_x f)^{-1}$

Donc $D_y g$ est une isométrie.

↳ $\|u(x)\| = \|x\| = \|u^{-1}(u(x))\|$ donc pr $y = u(x)$, $\|u^{-1}(y)\| = \|y\|$.

On veut appli iAF à nouveau ⚠ on a besoin d'1 convexe !




Quitte à réduire, opsq $W_a$ convexe.

Soit $B \subset W_a$ une boule ouverte centrée en $f(a)$ (psb car $W_a$ ouvert contenant $f(a)$).
On pose $U_a := g(B)$. Il est ouvert car $f$ est continue. ($f^{-1}$(ouvert))
On a alors que $f(g(B)) = B$ est convexe.

Par l'iAF, appli à $g$ sur $B$ :

$$\forall x,y \in U_a, \quad \|x-y\| = \|g(\underbrace{f(x)}_{\in W_a}) - g(\underbrace{f(y)}_{\in W_a})\| \le \|f(x)-f(y)\|$$

$\forall u,v \in W_a$, $\|g(u)-g(v)\| \le \|u-v\|$.

Donc $\forall x,y \in U_a$, $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$.

② mq $D_x f = D_y f$. $\forall x,y \in V_a$.

On mq $\|D_xf(h) - D_yf(h)\|^2 = 0$ $\forall h$

$\forall x,y \in U_a$, $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\|D_xf(h) - D_yf(h)\|^2 = \|D_xf(h)\|^2 - 2\langle D_xf(h), D_yf(h)\rangle + \|D_yf(h)\|^2$$
$$= 2\|h\|^2 - 2\langle D_xf(h), D_yf(h)\rangle \quad \to \text{isom}$$

On voudrait que $\langle D_xf(h), D_yf(h)\rangle = \langle h,h\rangle$.

mq $\forall x,y \in U_a, \forall h,e \in \mathbb{R}^n, \langle D_xf(h), D_yf(e)\rangle = \langle h,e\rangle$.

On va utiliser rela ① pr déduire ce qui nous intéresse.
Il s'agit de différentier une composition.

On a : $D_x\|\cdot\|^2 = 2\langle x, \cdot\rangle$.

$\forall x,y \in U_a$, on a : $\|f(x)-f(y)\|^2 = \|x-y\|^2$ → égalité préc mise au carré.

$\Rightarrow 2\langle f(x)-f(y), D_xf(h)\rangle = 2\langle x-y, h\rangle$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow -\langle D_yf(e), D_xf(h)\rangle = -\langle h,e\rangle$. $\forall h,e \in \mathbb{R}^n$ On différentie par rapport à $y$

Composition :

$\langle \text{const} - \cdot, \text{const}\rangle$ qui est linéaire

En particulier, $\langle D_yf(h), D_xf(h)\rangle = \|h\|^2$

Donc $D_yf = D_xf$

③ mq $f$ i.scon affine.

On va use argu connexité : mq $D_x f = D_0 f$ sur tt $\mathbb{R}^n$.

- Posons $A = \{x \in \mathbb{R}^n,\ D_x f = D_0 f\}$. $= (Df)^{-1}(\{D_0 f\})$
- $A$ est fermé car $Df$ continue ($f$ $C^1$)

Mq aussi ouvert par ce qui préc :

- Soit $a \in \mathbb{R}^n$. $\exists U_a \subset \mathbb{R}^n$ $\forall x \in U_a$, $D_x f \overset{②}{=} D_a f = D_0 f$ ($a \in A$.)

 Donc $U_a \subset A$ et $A$ ouvert.

Par connexité $A = \mathbb{R}^n$ donc $Df$ constante égale à $D_0 f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

④ exactement ≈ préc, ce qui montre la puiss de la connexité qui permet de passer du local au global.

- Soit $a \in \Omega$. $\Gamma = \{x \in \Omega,\ f(x) = f(a)\}$.
- $\Gamma$ fermé par conti de $f$
- Soit $x \in \Omega$, $f(x) = f(a)$

 Or, $x \in \Omega$ ouvert : $\exists R > 0$, $\underbrace{B(x, R)}_{\text{convexe}} \subset \Omega$

 Par l'IAF, $\forall y \in B(x,R)$ $\|f(y) - f(x)\| \leq \max\limits_{z \in B(x,R)} \underbrace{\|D_z f\|}_{=0} \|x - y\|$

 Donc $B(x,R) \subset \Gamma$ et $\Gamma$ ouvert

 $f(y) = f(x) = f(a)$

Donc $\Gamma = \Omega$ (par connexité de $\Omega$ car $x \in \Gamma$)